

分割表に対する 2×2 までの多重比較法

松田 眞一

E-Mail: matsu@nanzan-u.ac.jp

松田 (2004) で名義尺度の分割表に対する多重比較法を検討した。その中で, 2×2 までの可能性について示唆したが, 本論文ではその具体的な方法とシミュレーションを試みる。結果として前回の提案した方法に修正が必要なこととそれに関わらず有意水準を保つのは大変困難で, 使える分割表の大きさに制限があることが分かった。

1 はじめに

分割表 (クロス集計表) は社会科学では馴染み深い記述統計であるが, その表より客観的な判断を下すためにはピアソンのカイ 2 乗検定などの独立性の検定が欠かせない。しかし, たとえ独立でないと判断されてもどこにその要因があるかを考える方法があまり整理されていない。この場合に使われることが多いのは対数線形モデルであろうが, それでは推定問題となり検定の枠組みの中で結論を下すのには適していないと考えられるからである。

検定としての議論は広津 (1977), Hirotsu (1983) などで見られるが, 松田 (2004) において列および行の分割にのみ興味がある場合には閉検定手順を用いることで同じカイ 2 乗検定を用いて多重比較が行えることを示した。その中でさらに詳細に検討するために 2×2 までの分割の可能性を示唆したが, 具体的な検討は行っていない。

そこで, 本論文では 2×2 までの分割を行う手順を考え, それに基づいてプログラムを作成した場合のシミュレーション結果について述べる。

2 記号の定義

まず, 本論文で用いる記号を定義しておく。

2 つの要因 A, B はそれぞれ m, n 個の尺度で分類されており, A_1, \dots, A_m と B_1, \dots, B_n で表されるとする。分類の組み合わせ (A_i, B_j) (セルと呼ぶことにする) を性質としてもつ個体の観測数を X_{ij} で表す。

以上を表にまとめると表 1 のようになる。これが 2 次元の $m \times n$ 分割表である。2 つの要因 A, B は順序尺度の場合もあるが, 本論文ではその順序は考慮しない。

表 1: 分割表

	B_1	\cdots	B_n	計
A_1	X_{11}	\cdots	X_{1n}	$X_{1.}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
A_m	X_{m1}	\cdots	X_{mn}	$X_{m.}$
計	$X_{.1}$	\cdots	$X_{.n}$	$X_{..}$

また、本論文の議論は多次元にも同様に拡張可能であるが、ここでは特に触れないでおく。

さて、この分割表に対して独立性の検定とは以下のような帰無仮説に対して行われる検定である。

$$H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \text{for all } i, j$$

ただし、 $p_{ij} = E(X_{ij}) / \sum_k \sum_\ell E(X_{k\ell})$ 、 $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$ 、 $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^m p_{ij}$ である。

独立性が棄却された場合、いくつかのセルの間にだけ部分的な連関があることになるが、それを交互作用 (association) と呼ぶ。分割表の多重比較ではどんな交互作用が存在するのかが知りたいことであるが、本論文では最終的に 2×2 の部分分割表の交互作用をつきとめることを目標とする。

ただし、部分分割表とは元の分割表で特定の列や行を抜き出して構成したもののことである。抜き出した行が $P = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ で、列が $Q = \{j_1, \dots, j_q\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ の場合は表 2 のようになる。

表 2: 部分分割表

	B_{j_1}	\cdots	B_{j_q}
A_{i_1}	$X_{i_1 j_1}$	\cdots	$X_{i_1 j_q}$
\vdots	\vdots		\vdots
A_{i_p}	$X_{i_p j_1}$	\cdots	$X_{i_p j_q}$

また、この部分分割表に対応する独立性の帰無仮説を H_0^{PQ} と記すことにする。

3 分割表の 2×2 までの多重比較法

松田 (2004) において、次のように行と列の同時分割を場合分けした。

A 行と列の分割についてのみ関心がある場合

B さらに細かく 2×2 分割表まで関心がある場合

その上で、A については「全体の分割表が棄却されているなら独立だと考えてそれぞれ上の検定手順で検定して差し支えないと考えられる」と述べているが、まずこれ自体でも問題があることが判明した。(ここで述べられている「上の検定手順」とは、行または列のみに関心がある場合の閉検定手順を用いた多重比較法のことである。)

一般的に分散分析の場合、2 つ以上の要因の検定は独立と考えて多重性を考慮せずそれぞれ通常の有意水準 α (たとえば 5%) で行う。しかし、分割表の独立性の検定では分解が行および列であっても見ているのは交互作用であるため帰無仮説を 2 つに分けて考えることができない。(一つの部分分割表に対する帰無仮説は行での分割にも列での分割にも影響を与えるということである。) そのため、有意水準は分割表全体で考える必要があり、多重性を考慮しない限り有意水準が保てないことが分かった。簡便な対策は行での分割と列

での分割をそれぞれ有意水準 $\alpha/2$ (たとえば 2.5%) で行うというものである。この設定は Bonferroni の不等式より全体の有意水準を保つことを可能にする。

B についてはまず B-3 のすべての部分分割表を検定する場合について具体的な手順を構成する必要がある。

以下がそれを具体化したものである。

手順 1 有意水準 α を定める。

手順 2 全体を有意水準 α で検定する。棄却されなければ、すべての部分分割表は独立であるとして手順を終了する。

手順 3 $p \times q$ 部分分割表の検定のための個別の有意水準 α_{pq} を次のように定める。

$$\begin{aligned}\alpha_{pq} &= \alpha/2 & (p = m - 1 \text{ and } q = n - 1) \\ &= 1 - (1 - \alpha/2)^{q/n} & (p = m - 1 \text{ and } q = 2, \dots, n - 2) \\ &= 1 - (1 - \alpha/2)^{p/m} & (p = 2, \dots, m - 2 \text{ and } q = n - 1) \\ &= 1 - (1 - \alpha/2)^{pq/(mn)} & (p = 2, \dots, m - 2 \text{ and } q = 2, \dots, n - 2)\end{aligned}$$

手順 4 行の番号から構成される大きさ 2 以上の部分集合 P_1, \dots, P_M を考える。また、列の番号から構成される大きさ 2 以上の部分集合 Q_1, \dots, Q_N を考える。(それぞれの集合は大きさの大きいものから順番に並んでいるとする。すなわち、 $P_1 = \{1, \dots, m\}$, $Q_1 = \{1, \dots, n\}$ である。) また、 P_k の大きさを p_k , Q_ℓ の大きさを q_ℓ とする。

手順 5 $k = 1, \ell = 2$ とする。($k = 1, \ell = 1$ に対応する仮説は全体であり、棄却済み)

手順 6 仮説 $H_0^{P_k Q_\ell}$ がまだ保留されていなければ有意水準 $\alpha_{p_k q_\ell}$ で検定する。その結果、棄却されればこの仮説のみを棄却し、保留されればこの仮説と以下の仮説をすべて保留する。

$$H_0^{PQ}, \quad P \subseteq P_k, Q \subseteq Q_\ell$$

(このとき、 P, Q はそれぞれ k 番目以降、 ℓ 番目以降にしかないことに注意する。)

手順 7 $\ell < N$ ならば $\ell + 1$ を新しく ℓ において手順 6 に戻る。 $\ell = N$ のとき、 $k = M$ なら手順を終了する。そうでなければ $k + 1$ を新しく k とし、 $\ell = 1$ として手順 6 に戻る。

この手順により松田 (2004) で B-3 の場合が行える。(ただし、先ほどの考察より計算の基本となる有意水準が途中から $\alpha/2$ に変更されていることに注意する。) 行の分割と列の分割の有意水準は保証されているが、さらに踏み込んだ上の方法の場合どういう挙動を示すのかは明らかではない。

4 シミュレーション

前節での方法をプログラミングし、シミュレーションによりその性能を評価する。(実際には C 言語でプログラムを作成し、UNIX 上でその性能を評価した。)

4.1 シミュレーションで用いる帰無仮説

シミュレーションで最も重要なことはどのような帰無仮説を設定するかである。明らかなことであるが、全体として帰無仮説が成り立っている場合や行や列の分解までで帰無仮説が出尽くす場合の有意水準はシミュレーションをするまでもなく保たれている。(ただし、下記の設定では確認も含めてそのような帰無仮説も考慮はしている。)

また、独立性の仮説は行や列の比率の違いは問わないため、たとえ小さな表であっても無数の仮説が考えられる。

本論文では、まずベースの確率は等確率であると想定し、行や列での違いはないとした。その上でいくつかのセルに関してはそのベースの確率より 2 倍大きいとし、どのセルがそうであるかのみ検討することとした。(このようにベースとそうでないセルの組み合わせをセルのパターンと呼ぶことにする。) また、表は正方形のみで考えることとする。(行の数を c で表し、表の大きさと呼ぶ。)

具体例をあげてみる。以下の表 3 は 3×3 の分割表での分布の基準となる確率である。

表 3: 大きさ 3 の分割表の確率の例

	B_1	B_2	B_3	計
A_1	0.1818	0.0909	0.0909	0.3636
A_2	0.0909	0.0909	0.0909	0.2727
A_3	0.0909	0.0909	0.1818	0.3636
計	0.3636	0.2727	0.3636	1

この例ではベースの確率は 0.0909 であり、ベースから変えたセルは (1,1) と (3,3) である。それらはベースの確率の 2 倍となっている。(このセルのパターンは 4.2 節の大きさ 3 の表の $M_{3,3}$ である。) 確率を 2 倍にするセルを増やした場合、確率の合計が 1 となる制約があるため、ベースの確率は変わるが変化させるセルはベースの 2 倍であるということとは変えないとする。その場合、以後の乱数発生において比較が容易でなくなる問題が生じるのでベースのセルは度数の平均 $E(X_{ij})$ として λ_0 という定数を取るようには揃えることにする。

このように簡素化しても表が大きくなると様々なタイプがあり、有意水準の変化を網羅的に捉えるのは困難となる。その対策については 5 節で論じる。

4.2 シミュレーションの手順

シミュレーションの手順は以下の通りである。ただし、セルのパターンは 4.3 節のように与えるとする。また、セルの度数 X_{ij} はポワソン分布に従うとした。

手順 1 有意水準 α を定める。

手順 2 分割表の大きさ c とセルのパターンを決め、セルのパターンの合計 S を求める。

手順 3 乱数の基準となるベースセルの平均 λ_0 を決める。

手順 4 セルのパターンを S で割ることで各セルの確率 p_{ij} を計算する。

手順 5 λ_0 と S から理論総数 $T = S\lambda_0$ を計算する。

手順 6 母数 $\lambda_{ij} = Tp_{ij}$ のポワソン乱数を用いて分割表を生成する。

手順 7 3 節の方法で検定を行い，帰無仮説の棄却動向を調べる。

手順 8 手順 5～手順 6 を 10000 回繰り返してそれぞれの仮説の棄却割合を求める。

4.3 初期の設定パラメータ

4.1～4.2 節の議論に基づき，取り上げる設定パラメータはセルのパターンとベースのセルの度数平均 λ_0 である。以下に初期の設定パラメータを上げる。

4.3.1 セルのパターン

ベースのセルを 1，ベースの 2 倍のセルを 2 として表示する。

- 大きさ 3 の表 ($M_{3,1}, M_{3,2}, M_{3,3}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 大きさ 4 の表 ($M_{4,1}, \dots, M_{4,5}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 大きさ 5 の表 ($M_{5,1}, \dots, M_{5,7}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- 大きさ 6 の表 ($M_{6,1}, \dots, M_{6,4}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 大きさ 7 の表 ($M_{7,1}, M_{7,2}$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3.2 ベースのセルの平均 λ_0

ベースのセルの平均 λ_0 は 100, 200, 400 とした。

4.4 結果と考察

有意水準は $\alpha = 0.05$ として上のセルのパターンと λ_0 の適当な組み合わせでシミュレーションを行った。結果が表 4 である。ただし、セルのパターンの中に存在する部分分割表のすべての帰無仮説に対して誤って一つでも棄却される確率を FWE と表記し、 2×2 の部分分割表のすべての帰無仮説に対して誤って一つでも棄却される確率を 2×2 E と表記した。この表から次のようなことが分かる。

- 全体で帰無仮説が成り立っている場合の FWE の値より予測誤差は 0.0026 ぐらいである。(表中には誤差の 3 倍を基準に 0.0578 より大きい場合に*を付した。)
- 行と列で $\alpha/2$ 探索に切り替えたにも関わらず、大きさ 5 以上で全体での帰無仮説が成り立たずにいくつもの錯綜した帰無仮説が成り立つ場合、FWE では有意水準が守れない。
- 2×2 E より、関心を持つ仮説を内部では 2×2 表のみに絞った場合、ある程度までなら有意水準が保てそうである。しかし、大きさ 6 以上ではこれでも有意水準がわずかに保てない場合がある。

特に有意水準を守るといふ点ではそのままの FWE では大きさ 4 までしか使えないし、大きさ 5 まで保つように見える 2×2 E でもここで調べた以外のセルのパターンで破綻している可能性が否めない。

表 4: シミュレーション結果 1

パターン	m	FWE	$2 \times 2 \text{ E}$	パターン	m	FWE	$2 \times 2 \text{ E}$
$M_{3,1}$	100	0.0548	0.0469	$M_{5,1}$	100	0.0490	0.0075
$M_{3,1}$	200	0.0542	0.0457	$M_{5,1}$	200	0.0487	0.0072
$M_{3,1}$	400	0.0490	0.0421	$M_{5,2}$	100	0.0390	0.0095
$M_{3,2}$	100	0.0405	0.0395	$M_{5,3}$	100	0.0506	0.0135
$M_{3,2}$	200	0.0386	0.0381	$M_{5,4}$	100	0.0598*	0.0198
$M_{3,2}$	400	0.0427	0.0414	$M_{5,5}$	100	0.0697*	0.0305
$M_{3,3}$	100	0.0387	0.0387	$M_{5,5}$	200	0.0689*	0.0281
$M_{3,3}$	200	0.0437	0.0437	$M_{5,6}$	100	0.0604*	0.0409
$M_{3,3}$	400	0.0454	0.0454	$M_{5,6}$	200	0.0615*	0.0431
$M_{4,1}$	100	0.0528	0.0212	$M_{5,7}$	100	0.0601*	0.0425
$M_{4,1}$	200	0.0485	0.0181	$M_{5,7}$	200	0.0592*	0.0415
$M_{4,1}$	400	0.0534	0.0199	$M_{6,1}$	100	0.0504	0.0015
$M_{4,2}$	100	0.0399	0.0246	$M_{6,1}$	400	0.0516	0.0014
$M_{4,2}$	200	0.0403	0.0255	$M_{6,2}$	100	0.1001*	0.0284
$M_{4,2}$	400	0.0359	0.0234	$M_{6,3}$	100	0.0839*	0.0551
$M_{4,3}$	100	0.0517	0.0360	$M_{6,3}$	200	0.0775*	0.0520
$M_{4,3}$	200	0.0469	0.0317	$M_{6,3}$	400	0.0781*	0.0552
$M_{4,3}$	400	0.0480	0.0325	$M_{6,4}$	100	0.0801*	0.0579*
$M_{4,4}$	100	0.0472	0.0355	$M_{7,1}$	100	0.0801*	0.0323
$M_{4,4}$	200	0.0509	0.0406	$M_{7,2}$	100	—	0.0721*
$M_{4,4}$	400	0.0489	0.0385				
$M_{4,5}$	100	0.0250	0.0250				
$M_{4,5}$	200	0.0255	0.0255				
$M_{4,5}$	400	0.0350	0.0350				

5 シミュレーションに基づく実質有意水準の予測式

前節で調べたセルのパターンは適当に考えたものであるため、大きく有意水準を破るパターンを見逃している可能性がある。理想としては表の大きさごとでの実質有意水準の最大値を求めたい。しかし、シミュレーションには時間がかかり多くのパターンで検討するのは困難である。そのため、この節ではまず実質有意水準をセルのパターンから予測することを考える。いい予測式が見つければシミュレーションを行わなくても最大値の候補となるセルのパターンが見つけれられると思われるからである。なお、予測する実質有意水準は $2 \times 2 \text{ E}$ の方とする。

5.1 実質有意水準の予測式の構築

セルのパターンをどのように数値化すれば実質有意水準の予測が行えるかは大変難しい。今回は影響がありそうなものをいくつかあげ、その中から候補を絞ると共にそれらの候補間の積の効果も変数選択により抽出する方法を取った。候補として残ったものを上げると表 5 のようになる。

表 5: 実質有意水準の予測変数

記号	意味
x_1	$1/c$
x_2	$100/m^2$
x_3	(排他的に成り立つ帰無仮説のセルの総数)/ c^2
x_4	(排他的に成り立つ帰無仮説のセルの重複数)/ c^2
x_5	(排他的に成り立つ帰無仮説の自由度の合計)/ c^2

ただし, x_3, x_4, x_5 での「排他的に成り立つ帰無仮説」とは他の帰無仮説に完全に含まれることのない部分分割表の帰無仮説という意味である。なお, x_2 の 100 倍は係数が小さくなりすぎるための処置で他意はない。

これに先ほど述べた積の項と定数項を加えて実質有意水準 α' を次のように予測した。(実際はすべての積の項を入れて変数選択した結果以下が残った。)

$$\alpha' = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_1x_3 + b_7x_3x_4 + b_8x_1x_5$$

さて, 実際に係数を推定するには変数を与えなければならないが, 複雑なので例を上げて説明する。セルのパターン $M_{3,2}$ についてどのように計算するか見てみよう。

まず, x_1 は $c = 3$ なので $x_1 = 1/3$, x_2 は $m = 100$ としたとき, $x_2 = 100/100^2 = 0.01$ である。

次の x_3 のためにはすべての排他的に成り立つ帰無仮説を取り上げる必要がある。それは具体的には $H_0^{(2,3)(1,2,3)}, H_0^{(1,2,3)(2,3)}$ である。したがって, セルの総数は $(2 \times 3) \times 2 = 12$ となり, $x_3 = 12/3^2 = 4/3$ となる。

x_4 は上にあげた仮説をプロットして判断することになる。そうするとセル $(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)$ が重複して数えられているので重複数は 4 である。(もし, 同じセルが 2 回以上重複する場合はその都度カウントすることに注意する。) よって, $x_4 = 4/3^2 = 4/9$ となる。

最後に, x_5 は同じく x_3 で上げた仮説より, 自由度の合計が $2 \times 2 = 4$ となるので, $x_5 = 4/9$ となる。

このようにして表 4 に上げたすべてのデータについて予測のための変数を求め(実際には手作業でなくそれを求めるプログラムを作成), 最小 2 乗法により係数を決定すると以下の式が得られた。

$$\begin{aligned}\alpha' = & -0.03267 + 0.18709x_1 - 0.17471x_2 + 0.053643x_3 - 0.0049532x_4 - 0.060851x_5 \\ & -0.12027x_1x_3 - 0.00079787x_3x_4 + 0.18281x_1x_5\end{aligned}$$

5.2 予測式を用いたセルのパターンの探索

5.1 節の予測式を用いて実質有意水準の高いセルのパターンを探索する。今回は、単純に乱数でセルのパターンを作成し探索した。ただし、探索上は予測式の中で $x_2 = 0$ としておくことにする。(これはデータ数が十分多い場合に相当する。)

どのように乱数を発生させてパターンを作成するかも議論の対象となると思うが、ここでは細かく述べないことにする。(1,2 を等確率で発生させる方法などいくつか検討した。)

パターンを 1000 回ほど生成させたところ結果として大きさ 4 の場合と大きさ 5 の場合で初期に設定したセルのパターン以外で実質有意水準が上がると思われる以下の候補が見つかった。

- 大きさ 4 の追加表 ($M_{4,6}$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 大きさ 5 の追加表 ($M_{5,8}, M_{5,9}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

その設定でシミュレーションも行い、まとめたものが表 6 である。

表 6: シミュレーション結果 2

パターン	m	予測 2×2 E	2×2 E
$M_{4,6}$	100	0.0440	0.0486
$M_{5,8}$	100	0.0507	0.0536
$M_{5,9}$	100	0.0528	0.0510

この結果により提案した方法は大きさ 5 までは 2×2 E 基準で有意水準を保てると判断できる。

しかし、大きさ 6 以上では元々保てない上に乱数による単純な探索では上限がはっきりしないと考えられる。したがって、本論文では大きさ 6 以上の場合の実質有意水準の上限がどの辺りかの判断を保留する。

6 提案した手順の利用上の注意点

前節までの結果により、手順を用いる場合は次のように注意する。

- 大きさ 4 までの表は提示した手順どおりに行うとよい。

- 大きさ 5 の場合，有意水準をできるだけ正確に守るためには 4×4 , 4×2 , 3×3 , 3×2 の検定結果は用いない。(どうしても用いたい場合は，内部の 2×2 表が少なくとも一つは棄却されている表のみ棄却とするとよい。)

また，松田 (2004) で指摘したコンソナンスに関しては大きく守られない場合が出てくることになる。まず第 1 には全体が棄却された後に行および列のみで分割した場合の結果についてである。前回の有意水準をそのまま使う場合でもコンソナンスが守られない場合があることが分かっていたが，今回はその分割で用いる有意水準を $\alpha/2$ に変更したため，全体が棄却されるのに内部ではどれも棄却されないということがより多く起こるのである。分割表で内部構造を知りたい場合はより多くの観測数が必要であるということである。

第 2 には上の手順の注意で述べたように大きさ 5 の場合のギャップについてである。この場合も行または列の分割では棄却されたもののその内部の 2×2 表ではどれも棄却されないというところが出てくると思われる。これも上と同様より詳細な分析に対して観測数が乏しいと言えるであろう。

7 おわりに

本論文では，分割表における 2×2 までの多重比較法について模索し，シミュレーションでその性能の評価を行った。その結果，有意水準を保つのは困難で大きさ 5 までしか有意水準が保てないことが判明した。しかし，実用上はこの程度までの表も多く，利用できる範囲は広いであろう。

今後は，より大きな表の場合の実質有意水準の最大値の探索や他のアイデアによる多重比較法の構成および周辺合計を固定した多重比較法の構築が検討課題として残っている。

謝辞

本研究に関連して活発に議論していただいた東京都立大学大学院人文科学研究科の宮田剛章氏に感謝します。また，原稿の下読みをしてくれた院生の堀内賢太郎君，棚瀬貴紀君にも感謝します。

参考文献

- 広津千尋 (1977): 分割表における多重比較と水準の群わけ, “品質”, 7, 2, 27-33.
- Hirotsu, C. (1983): Defining the pattern of association in two-way contingency tables, *Biometrika*, 70, 3, 579-589.
- 松田眞一 (2004): 名義尺度の分割表に対する多重比較法, “南山大学紀要「アカデミア」数理情報編”, 4, 29-37.